



# Analýza dát

Prednáška 2

Základy teórie pravdepodobnosti

# Pravdepodobnosť

- Bez pravdepodobnosti niet štatistiky!
- Asi ste sa už stretli s otázkami typu:

Máme hraciu kocku so šiestimi stenami

- aká je šanca, že hodíme 6?
- aká je šanca, že hodíme 6 alebo 3?
- aká je šanca, že nehodíme 2?

Alebo aká je šanca, že vyhrám v lotériách: Loto, Keno 10, Joker,...?

# Základné pojmy z teórie pravdepodobnosti

**Náhodný pokus** je taký pokus, ktorého výsledok závisí na náhode a ktorý môžeme za tých istých podmienok zopakovať ľubovoľne mnohokrát.

**Náhodný jav** je výsledok náhodného pokusu.

**Množina výsledkov (priestor náhodných javov)** je množina všetkých možných výsledkov náhodného pokusu.

Príklady náhodného pokusu, náhodného javu a priestoru náhodných javov

# „Klasická“ formula pravdepodobnosti

- **Pravdepodobnosť náhodného javu  $A$**  (budeme označovať  $P(A)$ ) sa vypočíta ako pomer počtu priaznivých javov  $m$  k počtu všetkých možných javov  $n$ :
- $P(A) = \frac{m}{n}$
- Napr. pravdepodobnosť, že pri hode mincou padne znak je  $\frac{1}{2}$
- Napr. pravdepodobnosť, že pri hode kockou padne 6 je  $\frac{1}{6}$ ;
- Napr. pravdepodobnosť, že vyhrám v hre Loto je  $\frac{1}{\binom{46}{6}} = 7,15 \cdot 10^{-8} = 0,0000000715$
- [Pravdepodobnosť výhry v národnej lotériovej spoločnosti Tipos, a.s](#)

# Disjunktné alebo navzájom sa vylučujúce javy

- také, ktoré sa nemôžu udiť naraz (kockou nehodíme súčasne 1 aj 6);
- Aká je pravdepodobnosť, že hodíme kockou 1 alebo 6?:
- Riešenie 1:
- Riešenie 2:

# Pravidlo sčítania pravdepodobností disjunktných javov

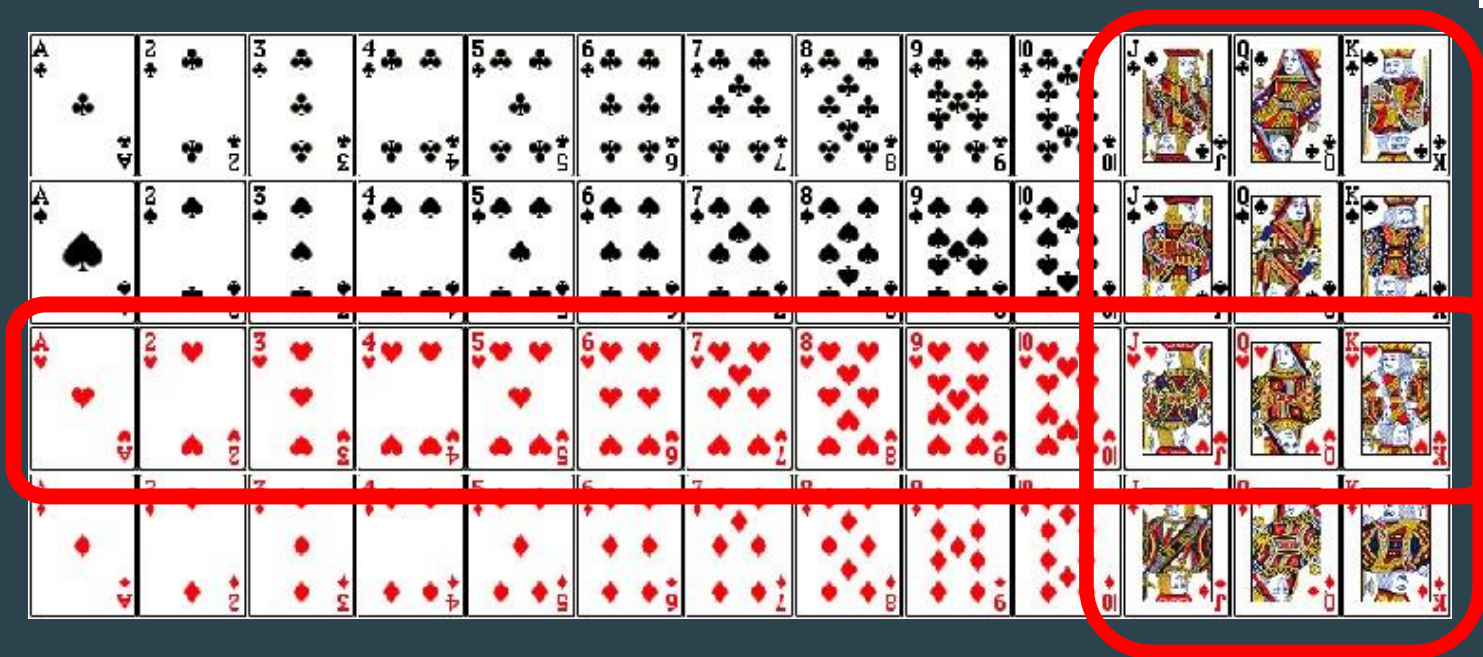
Ak  **$A_1$**  a  **$A_2$**  sú **disjunktné javy**, tak pravdepodobnosť, že nastane jeden alebo druhý je daná vzťahom:

$$P(A_1 \text{ alebo } A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

Ak by sme mali  $k$  disjunktných javov, tak pravdepodobnosť, že nastane niektorý z nich bude daná vzťahom :  $P(A_1 \text{ alebo } A_2 \text{ alebo } \dots A_k) =$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) = \sum_{i=1}^k P(A_i)$$

# Pravdepodobnosť javov, ktoré nie sú disjunktné



Nech A je náhodný jav: vytiahnutie ♥ karty

Nech B je náhodný jav: vytiahnutie „face“ karty (= J, Q, K)

# Príklad

- Vypočítajme pravdepodobnosť javu, že náhodne vytiahnutá karta bude ♥ alebo face;
- Sú javy A a B disjunktné?
- môže pomôcť vennov diagram...

# Príklad - riešenie

- Vennov diagram
- Výpočet

# Pravidlo sčítania pravdepodobností

Ak  $A$  a  $B$  sú dva javy, tak pravdepodobnosť toho, že nastane jeden alebo druhý je daná vzťahom:

$$P(A \text{ alebo } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ súčasne } B)$$

dohoda:

- alebo = or =  $\vee$  =  $\cup$
- a súčasne = and =  $\wedge$  =  $\cap$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

# Doplnok náhodného javu

- nazývaný aj komplement, je taký náhodný jav, ktorý nastane práve vtedy, ak nenastane jav  $A$
- označenie pre doplnok  $\bar{A}$  alebo  $A^c$
- vlastnosti doplnku:
  - $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
  - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

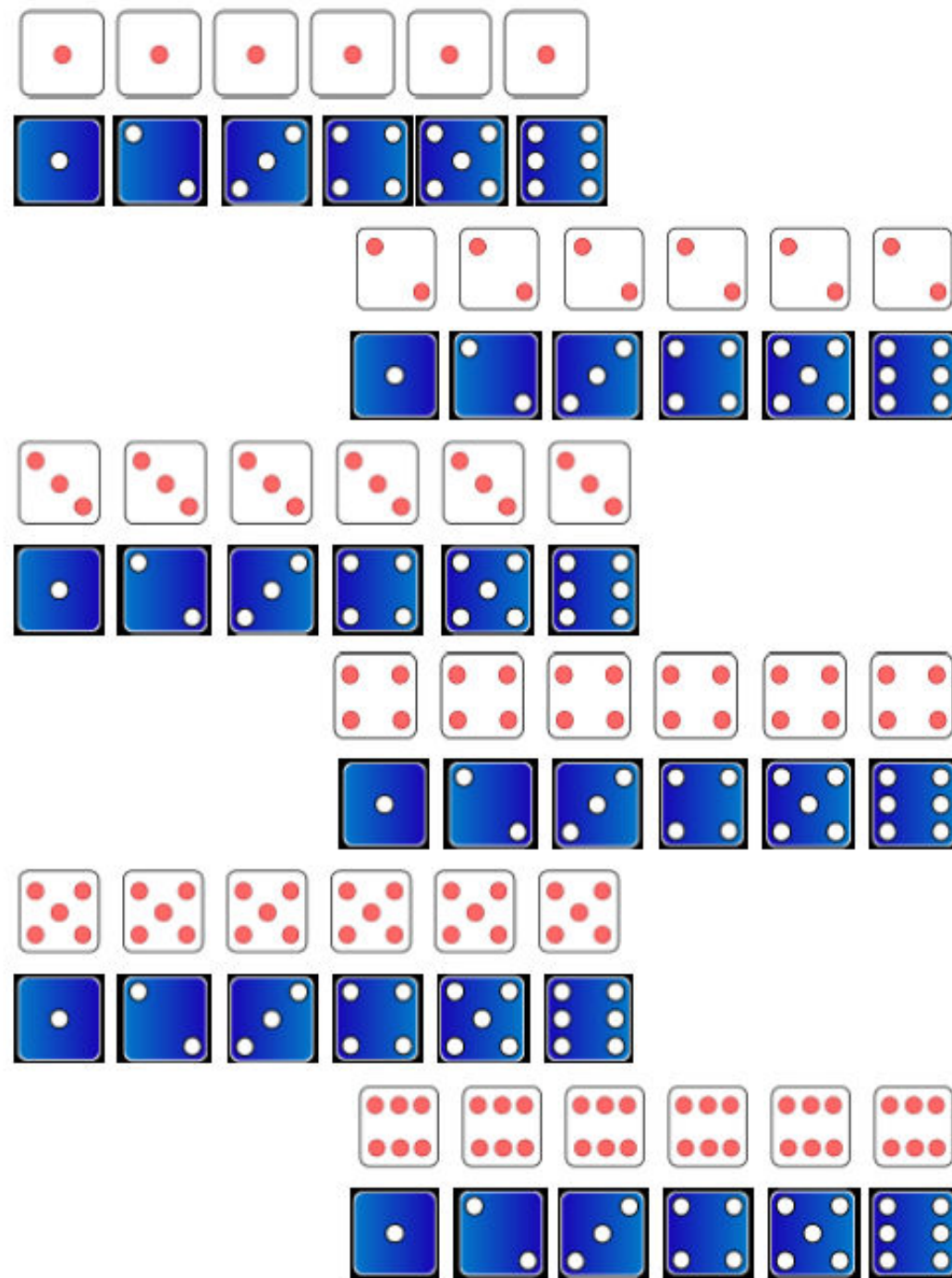
# Príklad

Nech  $A$  je náhodný jav, že pri hode kockou padne 1 alebo 2 ( $A = \{1,2\}$ ), Zistime, čo predstavuje  $A^c$  a vypočítajme  $P(A)$  a  $P(A^c)$ .

# Nezávislé javy

- dva javy sa nazývajú nezávislé, ak výsledok jedného javu neposkytuje nijaké užitočné informácie o výsledku druhého javu
- Hádzeme dvoma kockami, jednou bielou, druhou modrou a aká je pravdepodobnosť, že na oboch padne 6?
- Riešenie 1:
- Riešenie 2:

# Priestor náhodného javu pri hode dvomi kockami



# Pravidlo násobenia pravdepodobností nezávislých javov

- Nech  $A$  a  $B$  reprezentujú dva nezávislé javy, potom pravdepodobnosť toho, že nastanú oba súčasne sa rovná súčinu jednotlivých pravdepodobností:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

V prípade  $k$  nezávislých javov sa vzťah zmení:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k) =$$

$$= \prod_{i=1}^k P(A_i)$$

# Príklad - nezávislé javy

Predpokladajme, že premenné pohlavie a to, či je človek pravák alebo ľavák sú nezávislé (teda vedomosť o tom, či je človek muž alebo žena nám nedá žiadnu užitočnú informáciu o tom, či je pravák alebo ľavák). Pravdepodobnosť, že náhodne vybraný jedinec je ľavák je 0,09 a pravdepodobnosť, že náhodne vybraný jedinec je muž je 0,5.

Vypočítajme pravdepodobnosť, že náhodne vybraný jedinec je žena praváčka.

# Príklad – výber $k$ z $n$

Otcovia sú (zvyčajne) šťastní, keď sa im narodí syn. Z dlhodobých štatistík je známe, že pravdepodobnosť narodenia syna je 0,51.

Otec si naplánoval 4 deti. Aká je pravdepodobnosť, že z týchto štyroch detí budú práve 3 synovia?

# Binomické pravidlo - úvod

- $n$  = počet nezávislých pokusov (z koľkých vyberám);
- $k$  = počet úspešných pokusov (koľko vyberám);
- $p$  = pravdepodobnosť úspešného pokusu

$$P(k \text{ z } n) =$$
$$= \textit{počet kombinácií} \cdot P(\textit{jednej kombinácie});$$

pričom

$$P(\textit{jednej kombinácie}) = p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

$$\textit{počet kombinácií} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

# Binomické pravidlo -pokračovanie

- $0! = 1$
- $1! = 1$
- $2! = 2.1 = 2$
- $3! = 3.2.1 = 6$
- $4! = 4.3.2.1 = 24$
- $n! = n.(n-1) \dots 3.2.1$

# Binomické pravidlo - záver

Predpokladajme, že pravdepodobnosť, že náhodný jav bol úspešný je  $p$ . Potom pravdepodobnosť, že z  $n$  nezávislých pokusoch bolo práve  $k$  úspešných je daná vzťahom:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$